

Demoseiten

Vektor-Geometrie

für Sekundarstufe 1

Prüfungsaufgaben Teil 1

Prüfungsaufgaben
der Abschlussprüfung an Realschulen in Bayern!

mit ausführlichen Musterlösungen

und Querverweise auf Theorietexte der Mathe-CD

Bis jetzt sind 7 Aufgaben vorhanden
Es folgende weitere!

Auch in der Oberstufe des Gymnasiums zur Ergänzung einsetzbar

Hier wird nur zweidimensional gerechnet !
Das macht vieles anschaulicher !

Datei Nr. 11831

Friedrich W. Buckel

Stand 8. Juli 2007
wird noch erweitert

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese „bayerischen“ Aufgaben passen kaum auf andere Bundesländer und werden selbst an Gymnasien in Klasse 10 kaum Verwendung finden können. So speziell sind diese Aufgaben. Man fragt sich zurecht, wozu Realschüler dies können sollen, wenn man sich ihre Berufsziele anschaut. Ich veröffentliche diese Lösungen dennoch, eben für Schüler, Eltern und Lehrer in Bayern.

Interessant sind diese Aufgaben für Gymnasien als Oberstufenstoff. Der sich ein stellende neue Aufgabenstil im Abitur braucht Ideen, und diese sind hier durchaus zu finden.

Außerdem ist die hier betriebene Vektorgeometrie zweidimensional, die eine nette Bereicherung in der Vektorrechnung der Oberstufe an Gymnasien sein können. Als Gymnasiallehrer sollte man sich einmal um diese Aufgaben bemühen.

Viel Spaß dabei – ich hatte ihn durchaus beim Lösen dieser ungewohnten Aufgaben!

Ich verwende die in Bayern üblichen Zeichen für die Vektoraddition $\oplus$ und für das Skalarprodukt von Vektoren $\odot$. Für die Subtraktion habe ich leider nicht das analoge Zeichen in meinem Computer, weshalb ich hier nur das schlichte Minuszeichen $-$ verwende!

Noch etwas: Hinter Streckenlängen sollte man stets LE schreiben (Längeneinheit). Ich lasse dies weg und schreibe hinter das Ergebnis (LE). In den bayerischen Musterlösungen ist dies konsequenter gemacht. Doch das ist nicht zwingend notwendig und auch nicht überall üblich. Die Angabe der Maßeinheit nur hinter dem Ergebnis (und dann in Klammern) ist durchaus auch möglich. Es ist immer nur eine Frage der Festlegung, was erlaubt sein darf ...

Friedrich Buckel

im November 2006

Inhalt:

Aufgabensammlung	1
Lösungsteil	11
1. Aufgaben ohne trigonometrische Parameter	11
Aufgabe 101	12
Aufgabe 102	17
2. Aufgaben mit Parabeln	23
Aufgabe 121	24
Aufgabe 122	30
Aufgabe 123	38
3. Aufgaben mit trigonometrischem Parameter	45
Aufgabe 151	46
Aufgabe 152	52
Aufgabe 153	59
Aufgabe 154	66

Weitere Aufgaben folgen

Teil 1
Aufgabensammlung

Demo: Mathe-CD

1. Aufgaben ohne trigonometrische Parameter

Aufgabe 101 (Bayern 2002-1A2)

Aufgabe gegenüber dem Original leicht geändert

Die Punkte $B_n(x | -\frac{1}{2}x + 5)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Sie sind zusammen mit $A(4 | 1)$ und C_n Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken AB_nC_n mit AB_n als Basis. Die Punkte M_n sind Mittelpunkte der Basen AB_n . Die Strecken C_nM_n sind doppelt so lang wie die zugehörigen Basen AB_n .

- a) Zeichnen Sie die Gerade g sowie die Dreiecke AB_1C_1 für $x = 4$ und AB_2C_2 für $x = 9$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm, $-1 \leq x \leq 10$ und $-1 \leq y \leq 12$.

- b) Die Punkte B_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden.

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n .

(Ergebnis: $C_n(\frac{3}{2}x - 6 | \frac{7}{4}x - 5)$.)

- c) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Trägergeraden t der Punkte C_n und tragen Sie t in die Zeichnung zu a) ein.

(Teilergebnis: t hat die Gleichung $y = \frac{7}{6}x + 2$.)

- d) Im Dreieck AB_3C_3 liegt der Punkt C_3 auf der Geraden g . Zeichnen Sie das Dreieck AB_3C_3 in das vorhandene Koordinatensystem ein und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_3 und C_3 .

- e) Begründen Sie, dass die Dreiecke AB_nC_n ähnlich sind. Berechnen Sie sodann das Maß γ der Winkel $\sphericalangle AC_nB_n$ auf zwei Dezimalen gerundet.

Lösungen

1. Aufgaben ohne trigonometrische Parameter

Demo: Mathe-CD

Lösung 101

Gegeben sind die Punkte $B_n(x | -\frac{1}{2}x + 5)$ auf der Geraden $g: y = -\frac{1}{2}x + 5$ und der Punkt $A(4 | 1)$ als Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken AB_nC_n mit AB_n als Basis. Die Punkte M_n sind Mittelpunkte der Basen AB_n .

Die Strecken C_nM_n sind doppelt so lang wie die zugehörigen Basen AB_n .

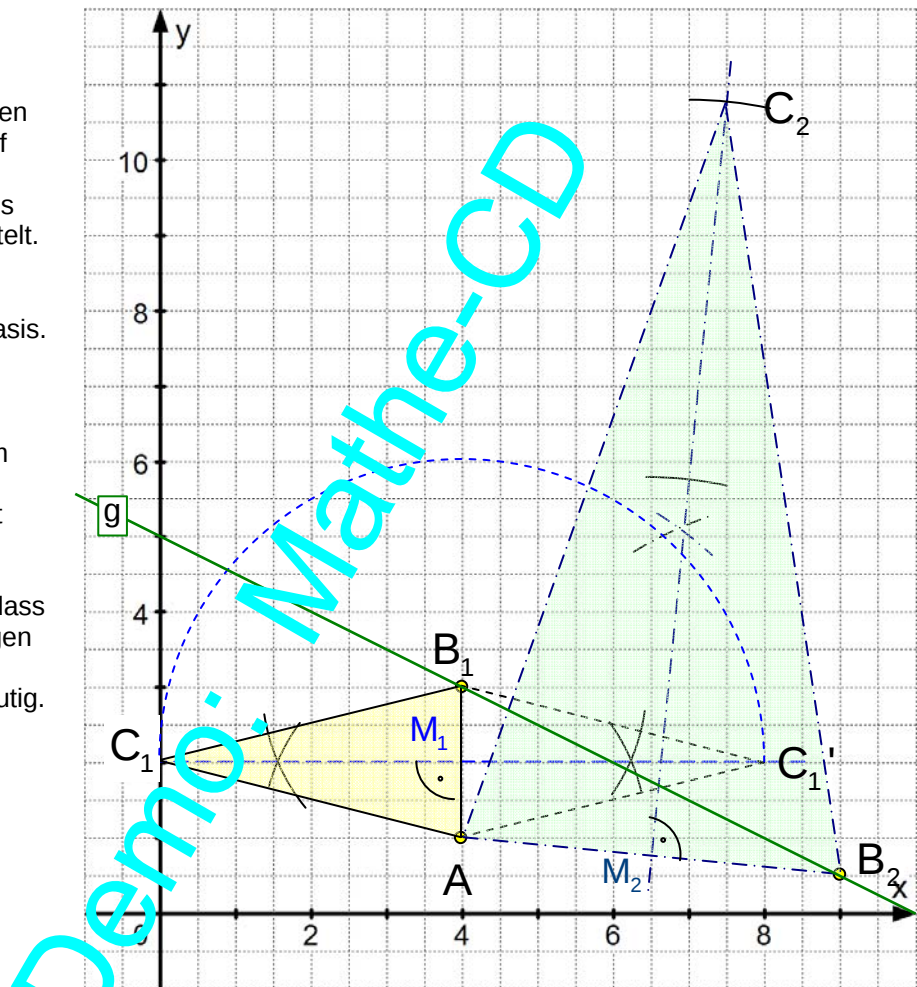
- a) Für $x = 4$ ist $B_1(4 | 3)$, für $x = 9$ erhält man $B_2(9 | \frac{1}{2})$

Anleitung zur Zeichnung.

Bei einem gleichschenkligen Dreieck liegt die Spitze auf der Mittelsenkrechten zur Basis. Diese wurde jeweils mit zwei Kreisbögen ermittelt.

Dann ist die Höhe M_nC_n doppelt so groß wie die Basis. Auch dies kann man mit Kreisbögen einzeichnen.

Eigentlich gibt es zu jedem Dreieck zwei kongruente Lösungen. (Zu AB_1C_1) ist die zweite Lösung AB_1C_1' auch eingezeichnet. Wählt man C jedoch so, dass der Drehsinn ABC entgegen dem Uhrzeigersinn ist, dann ist die Lösung eindeutig.



- b) Berechnung der Koordinaten der Punkte C_n .

Die erwähnte Abbildung kann man etwa so erreichen, dass man den Pfeil $\overrightarrow{AB}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn dreht und dann verdoppelt von M aus abträgt.

Wir kennen: $A(4 | 1)$ und $B_n(x | -\frac{1}{2}x + 5)$. Dann berechnet sich hieraus erstens

$$\text{der Mittelpunkt } M_n \left(\frac{x_A + x_{B_n}}{2} \mid \frac{y_A + y_{B_n}}{2} \right) = M_n \left(\frac{4 + x}{2} \mid \frac{1 - \frac{1}{2}x + 5}{2} \right) = M_n \left(2 + \frac{1}{2}x \mid 3 - \frac{1}{4}x \right)$$

$$\text{Und zweitens } \overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 4 \\ -\frac{1}{2}x + 4 \end{pmatrix}.$$

In der Datei 11812 (Vektorgeometrie 2) wurde die Drehung von Vektoren um 90° besprochen. Dort steht dieses Ergebnis:

WISSEN:

Dreht man einen Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ gegen den Uhrzeigersinn um 90° , dann entsteht der Vektor $\vec{u}' = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

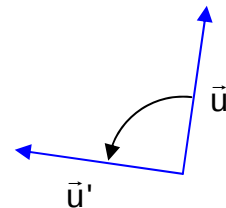
Man muss also die beiden Koordinaten vertauschen und bei der neuen 1. Koordinate das Vorzeichen ändern, damit der neue Vektor um 90° gegen den Uhrzeigersinn verdreht ist.

(Dies wird in der Datei 11812 Vektorgeometrie 2 in Abschnitt 7.5 besprochen und geübt)

Wollen wir also den Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -\frac{1}{2}x+4 \end{pmatrix}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn drehen, dann entsteht dieser Vektor $\vec{u}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x-4 \\ x-4 \end{pmatrix}$.

Das Doppelte dieses Pfeils tragen wir von M_n aus ab:

$$\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OM_n} + 2 \cdot \vec{u}' = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2}x \\ 3 - \frac{1}{4}x \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x-4 \\ x-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + \frac{3}{2}x \\ -5 + \frac{7}{4}x \end{pmatrix}$$



Also hat C_n diese Koordinaten:

$$C_n \left(\frac{3}{2}x - 6 \mid \frac{7}{4}x - 5 \right)$$

c) **Gleichung der Trägergeraden** von C_n :

Die 1. Koordinate (die wir jetzt nicht mehr x nennen dürfen, sondern eine andere Bezeichnung wählen müssen, etwa x') lautet:

$$x' = \frac{3}{2}x - 6 \quad (1)$$

Die 2. Koordinate ist $y' = \frac{7}{4}x - 5 \quad (2)$

(1) wird nach x aufgelöst: $\frac{3}{2}x = x' + 6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}x' + 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x' + 4$

Dies setzt man in (2) ein: $y' = \frac{7}{4} \left(\frac{2}{3}x' + 4 \right) - 5 = \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3}x' + \frac{7}{4} \cdot 4 - 5$
 $y' = \frac{7}{6}x' + 2$

Anmerkung: Die Bezeichnung x' und y' wurde nur zum Zwecke der Umrechnung benötigt. Jetzt – im Ergebnis – darf man diese Striche wieder weg lassen.

Ergebnis: Die Trägergerade t hat die Gleichung $y = \frac{7}{6}x + 2$

Anmerkung: Sehr gründliche Mathematiklehrer verlangen dazu immer noch die Angabe des Definitionsbereiches, also der zugelassenen Zahlen für x : $\mathbf{D} = \mathbf{R}$.

Oder die Grundmenge für diese Gleichung, die sieht dann so aus:
 $\mathbf{G} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (was heißen soll, dass für x und für y reelle Zahlen zu verwenden sind).

Bei Gleichungen, die Geraden (und nicht nur Strecken oder Halbgeraden) beschreiben, kann man dies vereinbarungsgemäß auch weglassen !

- d) Im Dreieck AB_3C_3 liegt der Punkt C_3 auf der Geraden g .
 Zeichnen Sie das Dreieck AB_3C_3 in das vorhandene Koordinatensystem ein und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_3 und C_3 .

Lösung

Wir kennen $C_n \left(\frac{3}{2}x - 6 \mid \frac{7}{4}x - 5 \right)$ und $g: y = -\frac{1}{2}x + 5$

Wenn C_n auf g liegt, müssen seine Koordinaten die Gleichung von g erfüllen.

Wir setzen also in g ein:

$$\underbrace{\left(\frac{7}{4}x - 5 \right)}_{y_C} = -\frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{3}{2}x - 6 \right)}_{x_C} + 5$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \frac{7}{4}x - 5 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}x - 6 \right) + 5 \\ \frac{7}{4}x - 5 &= -\frac{3}{4}x + 8 \\ \frac{10}{4}x &= 13 \\ x &= 13 \cdot \frac{2}{5} = \frac{26}{5} = 5,2 \end{aligned}$$

Zum Verständnis: x war die 1. Koordinate von B .

Laut Aufgabe heißt diese Punkt B_3 . Er hat die x -Koordinate $x_{B_3} = 5,2$
 Und folglich die y -Koordinate $y_{B_3} = -\frac{1}{2} \cdot 5,2 + 5 = -2,6 + 5 = 2,4$.

Ergebnis: $B_3(5,2 \mid 2,4)$

Damit können wir den Punkt C_3 nun durch Einsetzen berechnen:

$$C_3 \left(\frac{3}{2} \cdot 5,2 - 6 \mid \frac{7}{4} \cdot 5,2 - 5 \right) = C_3(1,8 \mid 4,1).$$

Zeichnung siehe nächste Seite.

- e) Begründen Sie, dass die Dreiecke AB_nC_n ähnlich sind.
 Berechnen Sie sodann das Maß γ der Winkel $\angle AC_nB_n$ auf zwei Dezimalen gerundet.

Lösung

Laut Aufgabe ist M_nC_n doppelt so groß wie AB_n , also viermal so groß wie AM_n . Folglich gilt für alle Teildreiecke AM_nC_n die Verhältnissgleichung $\overline{M_nC_n} : \overline{AM_n} = 4 : 1$. Außerdem schließen diese beiden Seiten stets einen rechten Winkel ein. Also sind sie ähnlich. Daraus folgt wegen der Achsensymmetrie sofort die Ähnlichkeit der Dreiecke AB_nC_n .

Wie man etwa am Dreieck AM_1C_1 erkennen kann ist

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{AM_1}}{\overline{CM_1}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 14,036 \text{ und } \gamma = 28,07^\circ$$

Dies gilt wegen des stets gleichen Seitenverhältnisses für alle Dreiecke.

Bemerkung zur Abbildung:

Jetzt ist die Trägergerade t der Punkte C_n eingetragen. Da C_3 auch noch auf g liegt, ist C_3 der Schnittpunkt von g und t .

Der Kreisbogen um C_3 durch A schneidet g in B_3 !

